

وارد کردن اثر برش در اجزای تیری و صفحه ای نازک

سیدرضا سرافرازی
کارشناس ارشد

محمد رضایی پزند
استاد

دانشکده مهندسی، گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این مقاله يك روش برای وارد کردن اثر برش در اجزای تیری و صفحه ای ارائه می گردد. روش مزبور در اجزای تیری منجر به ماتریس سختی دقیق می شود. برای وارد کردن اثر برش در صفحه های خمشی نازک، يك جزء چهار گرهی در نظر گرفته شده است. اثر تغییر شکلهای برشی بآسانی در این جزء وارد می گردد. با این حال، جزء صفحه ای نازک دارای ضعفهایی است که در پاره ای مسائل سبب بروز مشکل می گردد. این گونه ضعفها نیز بررسی شده اند.

Including the Shear Deformation in Thin Plate Bending and Beam Elements

M. Rezaiee-Pajand
Professor

S. R. Sarafrazi
M.S

Department of Civil Engineering,
Ferdowsi University, Mashhad

Abstract

This paper presents a method for including the shear effects in analysis of beam and plate bending elements. By using this method, the exact stiffness matrix can be obtained for beam elements. For including shear effects in thin plate bending, a four-node element is considered. Shear deformation effect is easily included in this element. However, this element has some difficulties. The demerits of the element are discussed too.

واژه‌های کلیدی

صفحه خمشی میندلین، تغییر شکل برشی، قفل برشی، تیر تیموشنکو، روش اجزای محدود.

۱- مقدمه

رفتار صفحه‌های نازک خمشی با نگره کیرشلف ارائه می‌شود. نگره مزبور، از اثر برش در تغییر شکل صفحه چشم‌پوشی می‌نماید. در صفحه‌های ضخیم، نیمه ضخیم و چند لایه‌ای، اثر برش مؤثر بوده و باید به نوعی وارد تحلیل گردد. یک روش برای این کار، استفاده از نگره مرتبه اول «رایزنر - میندلین» است [1, 2]. تاکنون اجزای زیادی براساس این نگره ارائه گردیده‌اند. افزون بر اینها، وارد کردن اثر برش در تغییر شکل جزء‌های نازک موجود نیز به موازات ارائه اجزای میندلینی انجام شده است [3 - 5].

جزء ACM یکی از اجزای اولیه و آشنا در تحلیل صفحه‌های نازک است [6]. تاکنون تلاشهایی برای وارد کردن اثر برش در این جزء انجام گرفته است [7 - 9]. خاطر نشان می‌کند، هیچ یک از روشها جزء ACM را به یک چهار پهلوی کلی توسعه نداده‌اند. در سال ۱۹۸۷ میلادی، منیگ و سونگ فا [10] چهار پهلویی را برای تحلیل صفحه‌های نازک ارائه کرده‌اند که حالت گسترش یافته‌ای از جزء ACM بود. تابعهای شکل جزء مزبور، در مختصات طبیعی به طور صریح ارائه گردید. سپس، با استفاده از ماتریس ژاکوبی مرتبه دوم، مشتقهای دوم خیز در مختصات دکارتی محاسبه شدند. براین اساس، ماتریس سختی جزء قابل محاسبه است. خاطر نشان می‌کند، جزء مزبور همانند جزء ACM ناسازگار می‌باشد. افزون بر این، درحالت غیر متوازی الاضلاع بودن شکل جزء، آزمون وصله را به صورت دقیق برقرار نمی‌کند. در این نوشته، جزء مزبور QMF نامیده می‌شود.

در این مقاله، نخست یک روش پیشنهادی برای وارد کردن اثر برش در تیرها ارائه خواهد شد. شیوه پیشنهادی منجر به ماتریس سختی دقیق برای تیر با اثر برش می‌گردد. سپس، روش مزبور به تحلیل صفحه‌ها گسترش می‌یابد. وارد کردن اثر تغییر شکل‌های برشی در جزء QMF نتیجه چنین توسعه‌ای خواهد بود. جزء پیشنهادی QS نامیده می‌شود.

۲- تیر تیموشنکو

۲-۱- الگوسازی ریاضی تیر تیموشنکو

تیری که دارای نیروهای برشی و لنکر خمشی در دو سرش است، در نظر گرفته می‌شود. اثر برش در تغییر شکل تیر مؤثر می‌باشد و این اثر با استفاده از نگره تیموشنکو وارد مسأله می‌گردد. بر این اساس، رابطه‌های حاکم بر رفتار تیر به دست می‌آیند. این روابط به سه دسته تقسیم می‌گردند:

۱- رابطه‌های تعادل:

$$Q_{,x} + q = 0 \quad (1)$$

$$Q - M_{,x} = 0 \quad (2)$$

۲- رابطه‌های تغییر مکان:

$$\kappa - \theta_{,x} = 0 \quad (3)$$

$$\gamma + \theta - w_{,x} = 0 \quad (4)$$

۳- رابطه‌های نیرو-تغییر مکان:

$$M - EIk = 0 \quad (5)$$

$$Q + \frac{GA}{f_s} \gamma = 0 \quad (6)$$

در اینجا، عاملهای q ، Q و M ، به ترتیب، بار گسترده خارجی، نیروی برشی و لنکر خمشی تیر هستند. دو عامل K و γ نیز انحنا و کرنش برشی تیر تیموشنکو می‌باشند که توسط روابط تغییر مکان به خیز، w ، و دوران، θ ، مربوط می‌شوند. عاملهای E ، G و f_s ، به ترتیب، ضریب کشسانی، کشسانی برشی و شکل مقطع هستند. سطح مقطع و لنکر لختی تیر، به ترتیب، A و I نشان داده می‌شوند. زیرنویس x ، بیانگر مشتق نسبت به x ، (d/dx) ، می‌باشد. جهت‌های مثبت نیروها و تغییر مکانهای تیر در شکل (۱) مشخص گردیده‌اند. یادآوری می‌کند، چنانچه این روابط به همراه شرایط مرزی حاکم بر مسأله به طور کامل برقرار گردند، پاسخ دقیق برای مسأله مورد نظر به دست خواهد آمد.

این مطالب، تابعهای درونیاب به گونه زیر در نظر گرفته می شوند:

$$w = P_w \alpha; \theta = P_\theta \alpha; \gamma = P_\gamma \alpha$$

$$P_w = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad 0]; P_\theta = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad (\Delta)$$

تابع درونیاب دوران، براساس رابطه $\gamma = w_{,x} = \theta$ به صورت زیر فرض می گردد:

$$P_\theta = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \quad -1] \quad (9)$$

با قرار دادن مقادیر گرهی در تابعهای w و θ ، دستگاه معادله ای به گونه زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & 0 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{kL^2}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix} \sim G\alpha = \begin{bmatrix} D \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

خاطر نشان می شود، معادله آخر دستگاه اخیر، همان رابطه بین کرنش برشی و دوران، رابطه (۷)، می باشد. با وارون کردن ماتریس G ، ضریبهای مجهول α در نتیجه تابعهای شکل به دست می آیند. میدانهای درون جزء دو گرهی به صورت زیر است:

$$w = ND; D = \{w_1 \quad \theta_1 \quad w_2 \quad \theta_2\}; N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

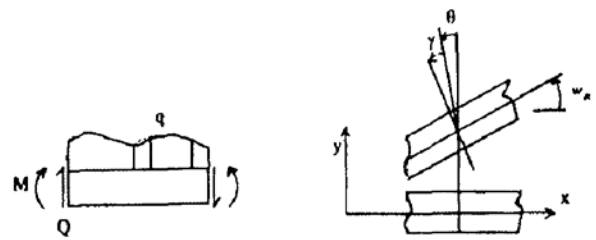
$$N_1 = \{2x^3 - 3Lx^2 - kL^2x + L^3(k+1)\} / (L^3(k+1))$$

$$N_2 = \{Lx^3 - \frac{4+k}{2}L^2x^2 + \frac{2+k}{2}L^3x\} \frac{1}{L^3(1+k)}$$

$$N_3 = \{-2x^3 + 3Lx^2 + kL^2x\} \frac{1}{L^3(1+k)}$$

$$N_4 = \{Lx^3 - \frac{2-k}{2}L^2x^2 - \frac{kL^3}{2}x\} \frac{1}{L^3(1+k)} \quad (11)$$

$$\gamma = \frac{k}{k+1} \frac{1}{L} \{ \frac{1}{2}(w_2 - w_1) - \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) \} \quad (12)$$



شکل (۱) جهت مثبت نیروها و تغییر مکان های تیر تیموشنکو.

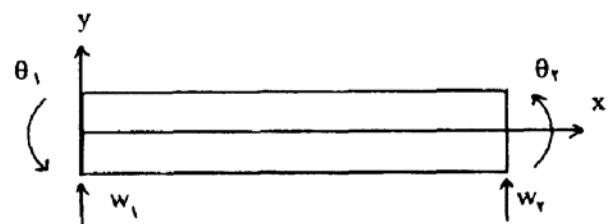
۲-۲- جزء دو گرهی تیر تیموشنکو

در این بخش یک رابطه سازی دقیق برای تیر تیموشنکو ارائه خواهد شد. باید دانست، باتوجه به روابط حاکم بر تیر، رابطه های ۱ تا ۶ بخش ۲-۱، می توان دریافت که با انتخاب مجهول های مناسب و استفاده از تمام این معادلات می توان شش مجهول مسأله را محاسبه کرد. در روش پیشنهادی با استفاده از رابطه های نیرو - تغییر مکان و رابطه تعادل (۲)، کرنش برشی برحسب مشتق های دوران ارائه می گردد. با به دست آمدن این رابطه، تابع های درونیاب برای جابجایی و دوران باسانی ارائه می شوند. رابطه بین کرنش برشی و دوران به صورت زیر به دست می آید:

$$Q = \frac{dM}{dx} = EI \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$-\gamma = \frac{f_s Q}{AG} = \left(\frac{f_s EI}{AG} \right) \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$\gamma = -\frac{kL^2}{12} \theta_{,xx} \quad (V)$$



شکل (۲) تیر تیموشنکو دو گرهی.

عامل k در این رابطه برابر با $12EI_f/AGL^2$ می باشد. در ادامه، یک جزء دو گرهی مورد توجه قرار می گیرد. به منظور رابطه سازی جزء مزبور، یک تابع درجه سه برای خیز تیر در نظر گرفته می شود. در نتیجه، میدان دوران جزء از درجه دو بوده و کرنش برشی درون جزء براساس رابطه (۷) مقدار ثابتی خواهد بود. باتوجه به

می آید. خاطر نشان می کند، هنگامی که بار وارده به تیر به صورت گرهی باشد؛ هر دو جزء درجه ۳ و درجه ۵ تغییر مکان سراسر تیر را به صورت دقیق ارائه می دهند. برای بارهای گسترده، تغییر مکان های گرهی به دست آمده از دو جزء دقیقند. با این حال، تیر درجه سه تغییر مکان های بین دو گره را به صورت دقیق ارائه نخواهد داد.

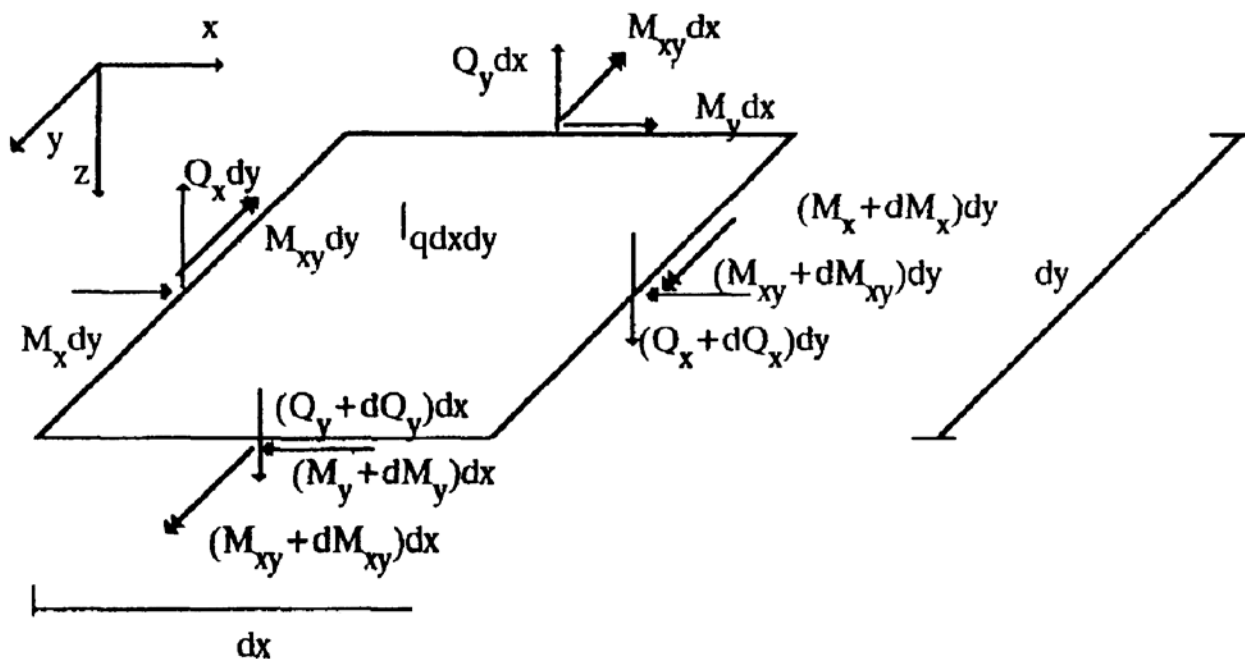
۳- پایه های ریاضی نگره رایزنر میندلین

برای به دست آوردن رابطه های ریاضی که رفتار صفحه خمشی رایزنر - میندلین را به خوبی ارائه دهند، جزء صفحه خمشی شکل (۲) مورد توجه قرار می گیرد. جهت مثبت نیروهای وارد به صفحه و دستگاه مختصات دکارتی کلی در شکل مزبور نشان داده شده است. شایان توجه می باشد، در نگره رایزنر - میندلین، صفحه به صورت دو بعدی الگوسازی می شود. در این نگره، رفتار سطحی که ضخامت صفحه را نصف می کند، به عنوان معروف بوده و به طور معمول، صفحه xy فرض می شود.

مقدار کرنش برشی در محدوده تیرهای نازک، هنگامی که $k \rightarrow 0$ ، به سمت صفر میل خواهد کرد. با کاربرد رابطه های درج شده، ماتریس سختی تیر به صورت زیر به دست می آید:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & & & \\ & \frac{6}{L^2} \frac{k+4}{L} & & \\ & & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} \\ & & \frac{6}{L^2} & \frac{2-k}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4+k}{L} \end{bmatrix} \left(\frac{EI}{k+1} \right) \quad (13)$$

ماتریس مزبور، ماتریس سختی دقیق تیر تیموشنکو بوده و براساس نگره ماتریسی تحلیل سازه ها نیز قابل دستیابی است [۱۴]. جزء حاصل قادر است پاسخهای دقیقی برای تغییر مکانها و نیروهای گرهی تیر ارائه کند. روش درج شده را می توان برای جزء سه گرهی نیز انجام داد. در این حالت، تابع درونیاب خیز درجه ۵ کامل بوده و تابع کرنش به صورت درجه ۲ کامل به دست



شکل (۳) نیروهای وارد به یک جزء کوچک صفحه خمشی.

با نوشتن معادله های تعادل ایستایی برای این جزء، می توان رابطه هایی بین نیروهای وارد بر صفحه ارائه نمود. برقراری تعادل نیروها در جهت محور z و لنگر کرد محورهای y و x، به ترتیب، رابطه های تعادل زیر را نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0 \quad (16)$$

در نگره رایزنر - میندلین «فرض بر این است که میان صفحه کرنشی ندارد. بنابراین، می توان خیز صفحه را همان خیز میان صفحه فرض نمود. هر نقطه در میان صفحه فقط می تواند در راستای محور z جابجا شود. برای ارائه روابط بین تغییر مکان ها فرض دیگری مورد نیاز است تا تغییرات کرنش را در عمق مقطع صفحه بیان کند. نگره مزبور، این تغییرات را خطی فرض می کند. به سخن دیگر، چنانچه خط راستی قبل از بارگذاری بر میان صفحه عمود باشد، پس از بارگذاری و تغییر شکل، خط راست باقی خواهد ماند، ولی در حالت کلی بر میان صفحه عمود نیست. این فرض را می توان در شکل (۴) مشاهده نمود. عامل های θ_x و θ_y در این شکل، به ترتیب، دوران ها کرد محورهای x و y هستند، کرنش های برشی نیز با γ_x و γ_y مشخص شده اند. عامل های w_x و w_y

مشتق خیز نسبت به x و y بوده و بیانگر شیب صفحه در جهت های x و y می باشند. با توجه به این شکل، رابطه بین تغییر مکان ها را می توان به گونه زیر نوشت:

$$\theta_x = w_{,y} - \gamma_y$$

$$\theta_y = -w_{,x} + \gamma_x \quad (17)$$

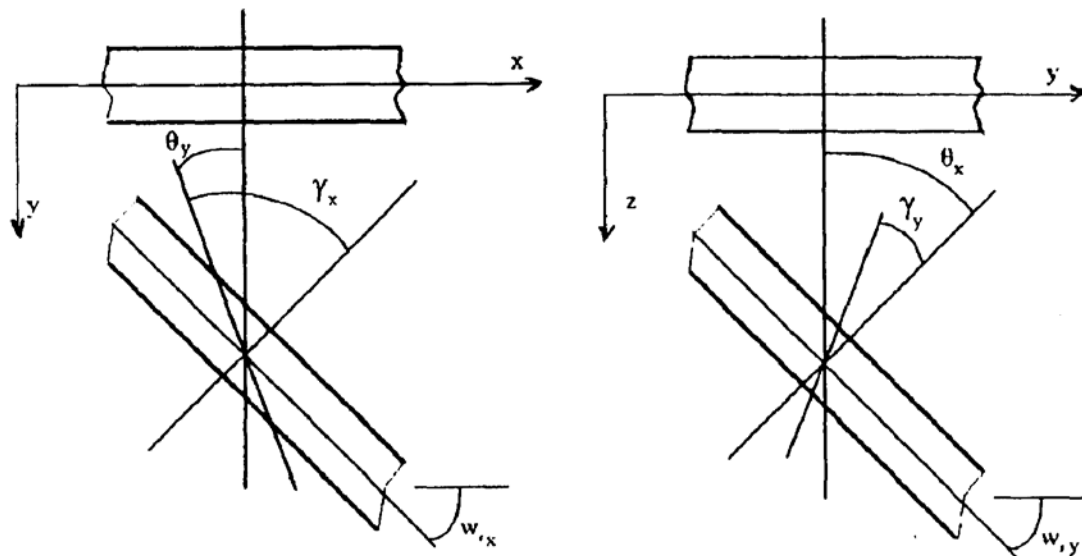
فرض تغییرات خطی کرنش های درون صفحه، ϵ_x و ϵ_y ، در عمق مقطع برای ارائه کرنش های صفحه برحسب تغییر مکان ها به کار می رود. براین اساس، انحناهای خمشی را می توان به گونه زیر تعریف نمود:

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial \theta_x}{\partial y}$$

$$\kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (18)$$

پس از برپایی رابطه های تعادل و تغییر مکان، نوبت به نوشتن رابطه های نیرو - تغییر شکل می رسد. بدین منظور، نخست؛ با استفاده از نگره کشسانی، تنش برحسب کرنش محاسبه می شود. سپس، با تابع اولیه گیری روی مقطع صفحه، می توان لنگر را بر حسب انحناها به دست آورد.



شکل (۴) تغییر مکان های صفحه خمشی میندلین.

کشسانی خمش خالص، برش و حالت کلی هستند. با استفاده از این رابطه ها، رابطه تنش - کرنش را می توان به صورت عمومی زیر نوشت:

$$\sigma = D_m \epsilon \quad (23)$$

با تعریف بردار تغییر شکل u و عملگر دیفرانسیلی L_m ، به صورت زیر، می توان رابطه نیرو - تغییر مکان را ارائه داد:

$$u^T = \{w \ \theta_x \ \theta_y\} \quad (24)$$

$$L_m^T = [L_b^T \ ; \ L_s^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & +\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & \vdots & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \vdots & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\sigma = D_m \epsilon = D_m (L_m u) = D_m L_m u \quad (26)$$

۴- جزء QS1

جزء پیشنهادی، یک جزء چهار پهلوئی چهار گرهی است. در گره های گوشه این جزء، درجه های آزادی پایه (w, θ_x, θ_y) فرض می گردد. بنابراین، تابع درونیاب خیز، مشابه جزء ACM، یک تابع درجه چهار ناقص با ۱۲ جمله خواهد بود. در این جزء، کرنش برشی γ_x تابعی خطی از y و کرنش برشی γ_y تابعی خطی از x می بایستی باشد. تابع های درونیاب (θ_x, θ_y) ، با رابطه (۱۷) مشخص می گردند. در نتیجه، ماتریس تابع های درونیاب در مختصات دکارتی و به صورت زیر ارائه خواهد شد:

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_{\theta_x} \\ P_{\theta_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & y & 0 & -3x^2 & -2xy & y^2 & 0 & -3x^2y & y^3 & 0 & 0 & 1 & y \end{bmatrix}$$

$$u = \{w \ \theta_x \ \theta_y\}^T = P \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{16}\}^T \quad (27)$$

$$M_x = \alpha_b (\kappa_x + \nu \kappa_y)$$

$$M_y = \alpha_b (\nu \kappa_x + \kappa_y)$$

$$M_{xy} = \alpha_b \frac{1-\nu}{2} (\kappa_{xy})$$

$$\alpha_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (19)$$

در این رابطه ها، عامل E ، ضریب کشسانی و ν نسبت بواسون می باشد. عامل t نیز بیانگر ضخامت صفحه می باشد.

برای محاسبه رابطه کرنش برشی و برش، در این نگره فرض می شود که کرنش برشی در عمق مقطع ثابت باشد. از سوی دیگر، چون تغییرات تنش برشی، در عمق مقطع از درجه ۲ است، لازم می باشد ضریب بهبودی در رابطه ها وارد گردد. این ضریب بهبودی که با f_s نشان داده شده، به طور معمول، برابر $1/2$ در نظر گرفته می شود. رابطه های لازم در زیر درج شده اند:

$$\tau_{xz} = \frac{Q_x f_s}{t} = G \gamma_x \rightarrow Q_x = \alpha_s \gamma_x$$

$$\tau_{yz} = \frac{Q_y f_s}{t} = G \gamma_y \rightarrow Q_y = \alpha_s \gamma_y$$

$$\alpha_s = \frac{Gt}{1.2} = \frac{Et}{2.4(1+\nu)} \quad (20)$$

رابطه های درج شده را می توان به شکل ماتریسی نوشت. برای این منظور، تعریف های زیر برای بردار کرنش و تنش ارائه می شود:

$$\epsilon^T = \{\kappa^T \ \gamma^T\}; \kappa^T = \{\kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}\}; \gamma^T = \{\gamma_x \ \gamma_y\}$$

$$\sigma^T = \{M_x \ M_y \ M_{xy} \ Q_x \ Q_y\} \quad (21)$$

$$D_b = \alpha_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; D_s = \alpha_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; D_m = \begin{bmatrix} D_b & 0 \\ 0 & D_s \end{bmatrix} \quad (22)$$

ماتریس های D_b ، D_s و D_m ، به ترتیب، ماتریس های

از مقایسه این رابطه‌ها با رابطه (۲۸)، ضرایب مجهول کرنش برشی به دست می‌آید.

$$\alpha_{13} = -\beta (6\alpha_{10} + 2\alpha_8) ; \alpha_{15} = -\beta (6\alpha_7 + 2\alpha_9)$$

$$\alpha_{14} = \alpha_{16} = -6\beta (\alpha_{11} + \alpha_{12}) \quad (۳۲)$$

خاطر نشان می‌کند، چنانچه تابعی با درجه بیشتر از یک برای کرنش برشی فرض شود، ضرایب درجه‌های بالاتر صفر به دست می‌آیند. بنابراین، برای جزء چهار پهلوی چهار گرهی، تابع‌های درست برای کرنش برشی همان‌هایی هستند که در رابطه (۲۸) ارائه شده‌اند. با محاسبه ضرایب مجهول کرنش برشی، درونیایی رابطه (۲۷) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^2y & xy^2 & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 + 2\beta & 2xy & 3y^2 + 6\beta & x^3 + 6\beta x & 3xy^2 + 6\beta x \\ 0 & -1 & 0 & -2x & y & 0 & -3x^2 - 6\beta & -2xy & y^2 - 2\beta & 0 & 3x^2y - 6\beta y & y^3 - 6\beta y \end{bmatrix}$$

$$u = P \{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{12} \}^T \quad (۳۳)$$

در رابطه‌سازی اخیر، اثر برش با عامل β معرفی می‌گردد. چنانچه سازه در محدوده صفحه‌های نازک قرار بگیرد، عامل β به سمت صفر میل می‌کند. در این حالت، فرض‌های کیرشلف به صورت صریح برقرار خواهند شد. به علاوه، ماتریس P در رابطه (۲۷) مشابه ماتریس مزبور در جزء رافایل [II] است. رافایل برای حذف مجهول‌های اضافی یک درجه آزادی دیگر به هر پهلو اضافه کرد. درجه آزادی مزبور، همان کرنش برشی عمود بر لبه است. سرانجام، وی با مشابه‌سازی پهلو با تیر تیموشنکو، درجه آزادی میان پهلو را بر حسب درجه‌های آزادی دو انتهای لبه ارائه نمود.

پس از به دست آمدن تابع‌های درونیایی، نوبت به محاسبه تابع‌های شکل می‌رسد. با جایگزینی مختصات گرهی در ماتریس P ، می‌توان ماتریسی به نام G تشکیل داد. سپس، ماتریس توابع شکل را از رابطه زیر به دست آورد:

$$N = PG^{-1} \quad (۳۴)$$

حال، کرنش‌های جزء قابل محاسبه است.

همان‌گونه که از رابطه (۲۷) مشاهده می‌شود، جمله‌های مربوط به ضرایب α_1 تا α_{12} در تابع‌های درونیایی دوران، همان مشتق‌های خیز مطابق رابطه (۱۷) می‌باشند. در نتیجه، میدان کرنش برشی به صورت زیر فرض شده است:

$$\gamma_x = \alpha_{15} + \alpha_{16} y$$

$$\gamma_y = \alpha_{13} + \alpha_{14} x \quad (۲۸)$$

همانند حالت دو بعدی، با ترکیب رابطه‌های نیرو-تغییر مکان و رابطه تعادل، کرنش برشی بر حسب مشتق‌های دوران ارائه می‌گردد. با چنین روابطی می‌توان ضرایب مجهول α_{13} تا α_{16} را حذف نمود. برای این منظور، رابطه لنگر-انحنای (۱۹) و رابطه برش-کرنش برشی (۲۰) در دو رابطه تعادل لنگر (۱۴ و ۱۵) وارد می‌گردد، بر این اساس، می‌توان نوشت:

$$Q_x = \alpha_s \gamma_x = \alpha_b (\kappa_{x,x} + \nu \kappa_{y,x} + \lambda \kappa_{xy,y})$$

$$Q_y = \alpha_s \gamma_y = \alpha_b (\nu \kappa_{x,y} + \kappa_{y,y} + \lambda \kappa_{xy,x})$$

$$\lambda = \frac{1-\nu}{2} \quad (۲۹)$$

حال، با جایگزینی رابطه‌های انحنا-دوران (۱۸) در رابطه‌های (۲۹)، کرنش‌های برشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_x = \frac{\alpha_b}{\alpha_s} [\theta_{y,xx} - (\nu + \lambda) \theta_{x,xy} + \lambda \theta_{y,yy}]$$

$$\gamma_y = \frac{\alpha_b}{\alpha_s} [-\theta_{x,yy} + (\nu + \lambda) \theta_{y,xy} - \lambda \theta_{y,xx}] \quad (۳۰)$$

با معرفی ضریب β به صورت $\beta = \alpha_b / \alpha_s$ و جایگزینی تابع‌های درونیایی دوران در رابطه‌های (۳۰) می‌توان نوشت:

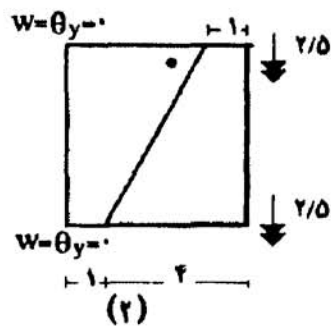
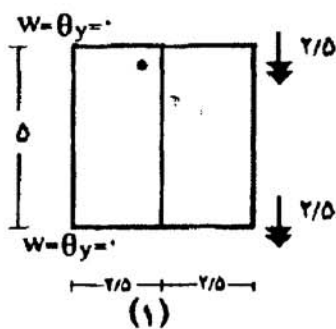
$$\gamma_x = \beta [-6\alpha_7 - 6\alpha_{11} - (\nu + \lambda)(2\alpha_9 + 6\alpha_{12}y) + \lambda(-2\alpha_9 - 6\alpha_{12})]$$

$$= -\beta [(6\alpha_7 + 2\alpha_9) + (6\alpha_{11} + 6\alpha_{12})y]$$

$$\gamma_y = -\beta [(6\alpha_{10} + 2\alpha_8) + (6\alpha_{11} + 6\alpha_{12})x] \quad (۳۱)$$

خمش ثابت صفر کند، می‌تواند مفید واقع شود [12]. علت دیگر برقرار نشدن آزمون وصله، ناسازگاری جزء می‌باشد. یادآوری می‌نماید، ممکن است وجود تغییر شکل برشی سبب ناسازگاری گردد [13]. به علاوه، جزء QS1 در حالت بدون اثر برش، $\beta = 0$ ، نیز ناسازگار است و آزمون وصله را برقرار نمی‌کند. با بررسی بیشتر، علت این مشکل نمایان خواهد شد.

به منظور مطالعه بیشتر رفتار جزء، صفحه خمشی شکل (۵) مورد توجه قرار می‌گیرد. سازه مزبور زیر اثر خمش ثابت قرار دارد. در شکل (۵-۱) دو جزء مستطیلی برای الگوسازی صفحه به کار رفته است. در این حالت $M_x = 1$ بوده و $M_{xy} = M_y = 0$ می‌باشد. با مورب شدن اجزا، دیگر حالت خمش ثابت به وجود نخواهد آمد. هر چه این مورب بودن بیشتر شود، درصد خطا افزایش می‌یابد. به عنوان نمونه، در حالت شکل (۵-۲) لنگرهای M_x و M_y به طور تقریبی برابر 0.5 هستند.



شکل (۵) آزمون وصله دو جزئی خمش ثابت

توجه بیشتری به تابع درونیاب خیز، رفتار جزء را نمایان می‌سازد. خاطر نشان می‌کند، می‌توان تابع درونیاب خیز را مشابه حالت رابطه سازی آزاد به دو قسمت تقسیم نمود. جملاتی که بیشترین درجه آنها دو است، به عنوان حالت تغییر شکل مرتبه پایین فرض می‌گردند. سایر جمله‌ها نیز در حالت تغییر شکل مرتبه

$$\varepsilon = BD = L_m ND = L_m PG^{-1} D = HG^{-1} D$$

$$H = \begin{bmatrix} H_b \\ H_s \end{bmatrix}$$

$$H_b = L_b P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 - 12\beta & -6y^2 - 12\beta \end{bmatrix}$$

$$H_s = L_s P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6\beta & 0 & -2\beta & 0 & -6\beta y & -6\beta y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\beta & 0 & -6\beta & -6\beta x & -6\beta x \end{bmatrix} \quad (25)$$

عملگرهای ماتریسی L_b ، L_m و L_s پیش از این معرفی شده‌اند. با تعریف‌های ارائه شده، ماتریس سختی جزء به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S = \int_A B^T D_m B dA = G^{-T} S' G^{-1}$$

$$S' = \int_A H^T D_m H dA = \int H_b^T D_b H_b dA + \int H_s^T D_s H_s dA \quad (26)$$

تابع اولیه گیری‌های لازم در ماتریس S' را می‌توان با روش تابع اولیه گیری کوس محاسبه کرد. برای محاسبه تابع اولیه گیری مربوط به سختی خمشی و برشی، به ترتیب، به 2×2 و 3×3 نقطه نمونه کوس نیاز می‌باشد. این حالت، یک تابع اولیه گیری کامل خواهد بود.

در محدوده صفحه‌های نازک، ضخامت جزء به سمت صفر میل می‌کند. در نتیجه، عامل β به سمت صفر میل خواهد کرد. بنابراین، پاسخ‌های جزء QMF در این حالت مشابه پاسخ‌های جزء QS1 می‌باشد. همچنین، هر دو جزء، در شبکه‌های خشن با اجزای مورب به آزمون وصله پاسخ نمی‌دهند. حالت مزبور، در بخش بعد مورد بررسی بیشتر قرار می‌گیرد.

۵- بررسی جزء QS1 در حالت خمش ثابت

یکی از مواردی که سبب برقرار نشدن آزمون وصله خمش ثابت می‌شود، اثرات تغییر شکل برشی است. کاربرد یک عملگر ماتریسی که سختی برشی را در حالت

چنانچه تغییر مکان‌ها به درستی محاسبه شوند، جزء قادر به ارائه انحنای ثابت خواهد بود. از سوی دیگر، حالت تغییر شکل خمش ثابت شامل جمله‌های مرتبه پایین است. بنابراین، حاصل $C_h D^c$ بایستی برابر صفر شود. در نتیجه، می‌توان نوشت:

$$B_h D_h = L_m P_h C_h D^c = 0 \quad (41)$$

حال باید دید آیا حاصل SD^c برابر با بردار بارهای معادل گرهی حالت خمش ثابت می‌گردد یا خیر؟ در صورت مثبت بودن پاسخ این پرسش، جزء قادر به ارائه تغییر مکان‌های درست حالت کرنش ثابت خواهد بود. با استفاده از رابطه (40) حاصل SD^c بررسی گردیده است. این مقدار را می‌توان به صورت زیر مجزاسازی کرد:

$$SD^c = AB_r^T D_m B_r D^c + \int B_h^T D_m (B_h D^c) dA + \int B_r^T D_m (B_h D^c) dA + \int B_h^T D_m B_r D^c dA \quad (42)$$

عبارت داخل پرانتز در رابطه (42) برابر صفر می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$SD^c = AB_r^T D_m B_r D^c + \left(\int B_h^T dA \right) D_m B_r D^c = P_r^c + P_{hr}^c \quad (43)$$

عامل P_r^c در رابطه (43) برابر مقدار $AB_r^T D_m B_r D^c$ می‌باشد. مطالعات عددی در مورد صفحه خمشی شکل (5) نشان می‌دهد که در حالت جزء مستطیل شکل، رابطه (43) نیروهای گرهی حالت کرنش ثابت را ارائه خواهد داد. چنانچه جزء مقداری مورب شود، دیگر رابطه مزبور مقدار درستی برابر نیروهای گرهی نتیجه نمی‌دهد. به عنوان نمونه، جزء نزدیک تکیه گاه در سازه شکل (5) زیر اثر میدان خمش ثابتی مطابق رابطه (44) قرار می‌گیرد. اجزای مزبور در شکل (6) نشان داده شده‌اند. با قرار دادن مختصات گرهی جزء در میدان تغییر شکل (44)، تغییر مکان‌های گرهی اجزای مستطیل شکل و مورب همانند رابطه (45) به دست می‌آیند.

$$M_x = C \quad ; \quad M_{xy} = M_y = 0 \quad ; \quad w = 1.5y + x^2 - 0.3y^2 \quad (44)$$

بالا گنجانده می‌شوند. اساس چنین تقسیم‌بندی بر این واقعیت استوار است که خمش و پیچش ثابت توسط حالت تغییر شکل مرتبه پایین ارائه می‌گردد. در چنین وضعیتی، ضریب‌های چند جمله‌ای مرتبه بالا بایستی صفر باشند.

$$P_w = [P_r \quad P_h]$$

$$P_r = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2]$$

$$P_h = [x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \quad (45)$$

به همین ترتیب، می‌توان ماتریس G^{-1} و B را نیز تقسیم‌بندی نمود. با فرض $C = G^{-1}$ می‌توان نوشت:

$$u = PCD = [P_r \quad P_h] \begin{bmatrix} C_r \\ C_h \end{bmatrix} D \quad (46)$$

$$\varepsilon = L_m u = (L_m P_r C_r + L_m P_h C_h) D = B_r D + B_h D \quad (47)$$

با کاربرد ماتریس‌های کرنش، رابطه (47)، ماتریس سختی جزء به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$S = \int B_r^T D_m B_r dA + \int B_h^T D_m B_r dA + \int B_r^T D_m B_h dA + \int B_h^T D_m B_h dA \quad (48)$$

چون ماتریس P_r شامل چند جمله‌ای با درجه 2 است، پس ماتریس کرنش مرتبه پایین، B_r ، ثابت خواهد ماند. این مطلب را می‌توان از مشاهده شش ستون اول ماتریس‌های H_r و H_h نیز دریافت.

حال، فرض می‌شود جزء در حالت خمش ثابت قرار داشته باشد. تغییر مکان‌های گرهی حالت مزبور، D^c فرض می‌گردند. چنانچه تغییر شکل‌های D^c در رابطه $u = PG^{-1}D$ قرار گیرند، تابع‌های میدان حالت کرنش خمشی ثابت را ارائه خواهند داد. این ویژگی، برای هر شکل چهار پهلوئی نامشخص برقرار است.

برای این منظور می‌توان چهار پهلوهای نامشخصی را در نظر گرفت. سپس، میدان‌های خمش ثابتی فرض نمود و تغییر مکان‌های گرهی را با استفاده از میدان‌های مزبور محاسبه کرد. چنانچه ماتریس‌های G و C برای این جزء‌ها محاسبه شوند. در همه موارد، حاصل PCD^c ، تغییر شکل حالت خمش ثابت را ارائه می‌دهد. از این رو،

$$P_r^{C2} = A^2 B_r^{2T} \sigma^c = \{-13.033, 8.732, 29.383, 13.033, -8.732, -13.848, 0.279, -0.945, 0.0386, -0.279, 0.945, -1.348\}^T \quad (47)$$

یادآوری می‌کند، رونویس‌های ۱ و ۲ در رابطه‌های درج شده مربوط به جزء ۱ و ۲ در شکل (۶) هستند. بردار نیروی P_{hr}^c نیز برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$P_{hr}^{C1} = \{7.597, -5.125, -15.896, -7.597, 5.125, -6.796, -0.552, 2.273, -3.391, 0.552, -2.273, 5.709\}^T$$

$$P_{hr}^{C2} = \{20.153, -14.315, -23.664, -20.153, 14.315, -0.846, 0.148, 1.867, -2.011, -0.148, -1.867, 6.961\}^T \quad (48)$$

با جمع کردن نیروهای متناظر در روابط (۴۷ و ۴۸)، نیروهای گرهی ایجاد شده به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$P_r^{C1} + P_{hr}^{C1} = \{0, 0, 4.55, 0, 0, -4.55, 0, 0, 4.55, 0, 0, 4.55\}$$

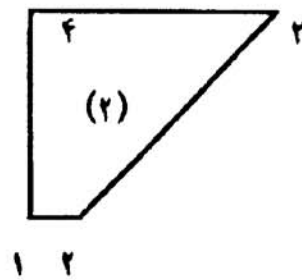
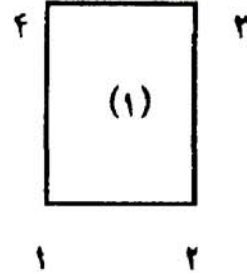
$$P_r^{C2} + P_{hr}^{C2} = \{7.12, -5.583, 5.719, -7.12, 5.583, -14.694, 0.427, 0.929, -2.0496, -0.427, -0.922, 5.613\} \quad (49)$$

همان‌گونه که درج شد، بردار لنگر درون جزء، مطابق رابطه (۴۶) می‌باشد. بنابراین، مقدار دقیق لنگر M_y گره‌های ۲ و ۳ برابر $4/55$ و $-4/55$ و $M_x = -1/82 \times 2/5 = -4/55$ خواهد بود. سایر نیروهای گرهی نیز صفرند. با نگاهی به بارهای گرهی محاسبه شده با رابطه (۴۹) مشاهده می‌گردد که فقط نیروهای جزء مستطیل شکل، جزء شماره ۱، مقدارهای درستی دارند. در واقع، برای جزء مستطیل شکل، نیروهای برشی و لنگرهای M_x ناصفری که در حالت تغییر شکل مرتبه پایین به وجود می‌آیند با مقدار متناظرشان در بردار P_{hr}^c برابر و قرینه هستند. در نتیجه، اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند، اما، در جزء مورب چنین حالتی پیش نمی‌آید.

در ادامه، کوشش می‌شود به جای ماتریس سختی حالت تغییر شکل مرتبه پایین و ماتریس‌های سختی انتقالی بین دو حالت تغییر شکل، ماتریسی به نام S_r جایگزین شود تا آزمون وصله به صورت دقیق برقرار

$$D^{C1} = \{0, 1.5, 0, 6.25, -1.5, -5, 6.25, -1.5, -5, 0, -1.5, 0\}^T$$

$$D^{C2} = \{0, 1.5, 0, 1, -1.5, -2, 16, -1.5, -8, 0, -1.5, 0\}^T \quad (45)$$



شکل (۶) جزء نزدیک تکیه گاه سازه شکل (۵).

باید دانست، ضریب کشسانی، E ، در این سازه برابر $10/92$ و ضخامت صفحه، $t = 1$ فرض می‌شود. ماتریس کرنش B_r و B_n برای هر دو جزء شکل‌های (۶-۱ و ۲) محاسبه گردیده است. حاصل عبارت $D_m B_r D^c$ برای هر دو جزء مورد نظر برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$D_m B_r^1 D^{C1} = D_m B_r^2 D^{C2} = \{-1.82 \quad 0 \quad 0\}^T = \sigma^c \quad (46)$$

در حقیقت، بردار رابطه (۴۶) همان بردار تنش ایجاد شده در اثر میدان تغییر شکل (۴۴) است. به سخن دیگر، تغییر شکل‌های درست جزء منجر به تنش‌های صحیح می‌گردند. برای محاسبه نیروهای گرهی ایجاد شده، نخست نیروهای P_r^c محاسبه می‌شوند. نیروهای مزبور، برای دو جزء مورد بررسی، به صورت زیر خواهند بود:

$$P_r^{C1} = A^1 B_r^{1T} \sigma^c = \{-7.597, 5.125, 20.446, 7.597, -5.125, 2.246, 0.552, -2.273, -11.593, -0.552, 2.273, -1.159\}^T$$

σ^c مشخص شده است. بنابراین، ماتریس AB_r^* ، تنش‌های ثابت جزء رابه نیروهای معادل گرهی حالت انحنای ثابت پیوند می‌دهد. این ماتریس را می‌توان با فرض تنش‌های ثابت درون جزء و کاربرد معادلات ایستایی محاسبه کرد. برای این منظور، بردار تنش σ^c به صورت بردار ثابت $\{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ فرض می‌گردد. برای آسانی کار، از روش روی هم گذاری استفاده می‌شود. بدین صورت که یک جزء کلی به طور جداگانه زیر اثر لنگر $M_x = 1$ ، $M_y = 1$ و $M_{xy} = 1$ قرار می‌گیرد. حالت‌های مزبور، در شکل (۷) نشان داده است. نیروهای گرهی در هر حالت محاسبه می‌گردد. به سبب ثابت بودن لنگر در امتداد پهلوها، برآیند لنگر در هر پهلو محاسبه شده و به نسبت مساوی بین گره‌های دو انتهای پهلو تقسیم می‌شود.

به عنوان نمونه، نیروهای گره ۱ محاسبه می‌گردند:

$$M_{x1} = \frac{x_2 - x_1}{2} M_y + \frac{x_4 - x_1}{2} M_y + \frac{y_4 - y_1}{2} M_{xy} + \frac{y_2 - y_1}{2} M_{xy} = \frac{x_2 - x_4}{2} M_y + \frac{y_4 - y_2}{2} M_{xy}$$

$$M_{y1} = \frac{y_2 - y_1}{2} M_x + \frac{y_4 - y_1}{2} M_x + \frac{x_4 - x_1}{2} M_{xy} + \frac{x_2 - x_1}{2} M_{xy} = \frac{y_2 - y_4}{2} M_x + \frac{x_4 - x_2}{2} M_{xy}$$

$$F_{z1} = 0$$

به طور مشابه می‌توان سایر نیروهای گرهی را به دست آورد. با توجه به چنین نیروهایی، حاصل AB_r^* به صورت زیر خواهد بود:

$$AB_r^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & y_2 - y_4 & 0 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & 0 & y_4 - y_2 & 0 & 0 & y_1 - y_3 \\ 0 & x_2 - x_4 & 0 & 0 & x_3 - x_1 & 0 & 0 & x_4 - x_2 & 0 & 0 & x_1 - x_3 & 0 \\ 0 & y_4 - y_2 & x_4 - x_2 & 0 & y_1 - y_3 & x_1 - x_3 & 0 & y_2 - y_4 & x_3 - x_4 & 0 & y_3 - y_1 & x_3 - x_4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

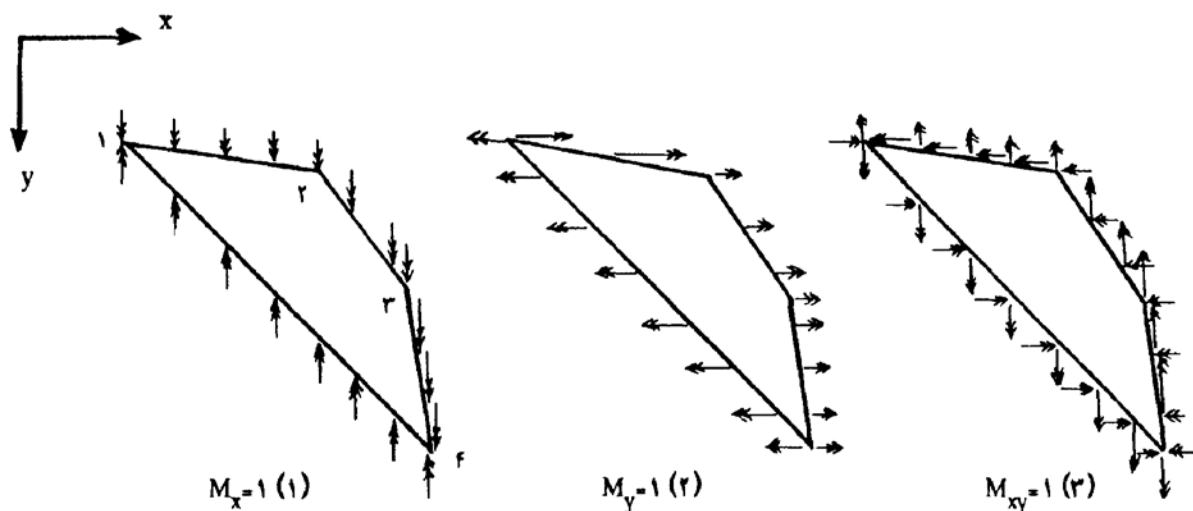
گردد. روش مزبور، مشابه رابطه سازی آزاد خواهد بود. خاطر نشان می‌کند، روش رابطه سازی آزاد در صفحه‌های خمشی با اثر برش به کار رفته است. برگان و همکارش [14]، در سال ۱۹۸۴ میلادی، یک چهار پهلو با ۱۲ درجه آزادی ارائه کردند. لیو و همکارانش [15] نیز در سال ۱۹۹۵ یک چهار پهلو سازگار با ۱۶ درجه آزادی پیشنهاد نمودند. با این حال، هر دو مورد مقداری با آنچه در جزء QSI در نظر گرفته می‌شود تفاوت دارد. تفاوت عمده آنها، در نظر نگرفتن اثر برش در تابع درونیاب است. ماتریس S_r می‌تواند به وسیله معادله‌های تعادل محاسبه گردد. در این صورت برابری حاصل $S_r D^c$ و نیروهای معادل گرهی کرنش ثابت، F^c ، تضمین خواهد شد. در حالت خمش ثابت، برش صفر می‌باشد. بنابراین، از قسمت سختی برشی چشم پوشی می‌گردد. چنانچه ماتریس کرنش حالت مزبور با B_r^* نشان داده شود، می‌توان نوشت:

$$S_r = AB_r^{*T} D_b B_r^* \quad (50)$$

در این رابطه، A سطح جزء و D_b ماتریس کشسانی خمشی می‌باشد. با ضرب دو طرف تساوی (۵۰) در بردار D^c رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$S_r D^c = AB_r^{*T} D_b B_r^* D^c = AB_r^{*T} \sigma^c = P^c \quad (51)$$

حاصل عبارت $D_b B_r^* D^c$ در رابطه (۵۱) بیانگر تنش‌های حالت انحنای ثابت می‌باشد. تنش‌های مزبور با



شکل (۷) تنش‌های ثابت در یک چهار پهلو کلی.

روی دو جزء QS1 و QS2 انجام گرفته است، ارائه خواهد شد.

۶- آزمون های عددی

به منظور تحلیل صفحه خمشی با اجزای QS1 و QS2، برنامه رایانه ای نوشته شده است. در ادامه، پاسخ های مسایل مرسوم در صفحه های میندلینی - که با برنامه رایانه ای محاسبه شده - ارائه می گردد. پاسخ های مزبور، با مقادیر دقیق و نتایج اجزای مراجع دیگر مقایسه خواهد شد.

۶-۱- تحلیل مقادیر ویژه

این تحلیل، برای بررسی اثر کاهش مرتبه تابع اولیه گیری در مرتبه ماتریس سختی انجام گرفته است. جمله های ماتریس سختی، حداکثر از درجه ۵ بر حسب x یا y هستند. بنابراین، استفاده از 2×2 نقطه نمونه گوس منجر به پاسخ های دقیق برای تابع اولیه گیری می شود. چنانچه به جای این تعداد، از 2×2 نقطه نمونه گوس استفاده گردد، پاسخ ها تغییر محسوس نخواهد کرد. محاسبه تعداد مقادیر ویژه صفر ماتریس سختی در این حالت برای اجزای مختلف انجام گرفته است. در هیچ یک از اجزا حتی در حالت خیلی مورب، کاهش مرتبه ای در ماتریس سختی مشاهده نمی گردد. بنابراین، محاسبات ماتریس سختی جزء های QS1 و QS2، با 2×2 نقطه نمونه انجام خواهد گرفت.

۶-۲- آزمون وصله

در این بخش به بررسی نتایج آزمون وصله برای دو جزء QS1 و QS2 پرداخته می شود. نخست، آزمون وصله خمش ثابت مورد توجه قرار می گیرد. دو نوع شبکه بندی شکل (۵) برای این آزمون به کار رفته اند. تنش های یک نقطه گوس انتخابی، برای دو جزء QS1 و QS2 در جدول (۱) درج شده اند. نقطه گوس مورد نظر، در شکل (۵) با علامت * مشخص گردیده است. برای جزء QS2 در حالت کلی و جزء QS1 در حالت خاص مستطیلی، تنش های نقطه نمونه گوس با تنش ها در سایر نقاط صفحه برابرند. خاطر نشان می کند، اعداد صفر و یک جدول (۱) با دقت هشت رقم اعشار می باشند. همچنین، تنش های نقطه نمونه گوس انتخاب شده در جزء QS1 نسبت به سایر نقاط وضعیست بدتری دارد.

ماتریس کرنش B_r^* با تقسیم ماتریس (۵۲) بر مساحت جزء A ، به دست می آید. با محاسبه B_r^* ، ماتریس سختی S_r به آسانی محاسبه می شود. چنین ماتریسی قادر است آزمون وصله را به صورت دقیق برقرار کند. به عنوان نمونه، برای جزء مورب شکل (۶-۲) ماتریس B_r^* به صورت زیر می باشد.

$$B_r^{*2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2.5 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & 2.5 & 0 & 0 & -2.5 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2.5 & -0.5 & 0 & -2.5 & -2 & 0 & -2.5 & 0.5 & 0 & 2.5 & 2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

باتوجه به ماتریس مزبور و بردار تغییر مکان گرهی D^c ، حاصل σ^c محاسبه می گردد:

$$\sigma^c = D_b B_r^{*2} D^{C2} = \{-1.8 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (54)$$

بردار مزبور، همان بردار دقیق لنگرهای داخلی جزء می باشد. محاسبه حاصل $S_r D^c$ نیز، مقدار دقیق نیروهای گرهی حالت لنگر $M_x = -1/8$ را ارائه می دهد. مقدار مزبور همان بردار نخستین رابطه (۴۹) می باشد. با داشتن ماتریس S_r ، ماتریس سختی جزء به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$S = S_r + S_h ; S_h = C_h^T \left(\int H_h^T D_m H_h dA \right) C_h \quad (55)$$

در اینجا، ماتریس H_h ، فقط قسمت مربوط به حالت تغییر شکل مرتبه بالا از ماتریس H را در بر دارد.

$$H_h = \begin{bmatrix} -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & -4x & -4y & 0 & -6x^2 - 12\beta & -12\beta - 6y^2 \\ -6\beta & 0 & -2\beta & 0 & -6\beta y & -6\beta y \\ 0 & -2\beta & 0 & -6\beta & -6\beta x & -6\beta x \end{bmatrix} \quad (56)$$

جزئی که ماتریس سختی آن از رابطه (۵۵) محاسبه می گردد، QS2 نامیده شده است. نتایج عددی نشان می دهد که جز QS2 در پاره ای از مسایل سخت تر از حد معمول می باشد. در بخش بعدی، آزمون های عددی که

جدول (۱) تنش‌های نقطه گوس در شکل (۵) زیر اثر خمش ثابت $M_x = 1$.

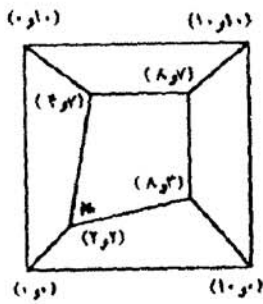
| تنش | M_x | M_y | M_{xy} | Q_x | Q_y |
|-------------------------|--------|--------|----------|-------|-------|
| شبه (۲) - QS1 | ۰/۳۹۵۶ | ۰/۴۴۳۶ | -۲/۲۵ | ۰/۵۸۷ | ۰/۲۶۸ |
| شبه (۱) - QS1 | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| شبه‌های (۱) و (۲) - QS2 | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |

(۲-۸) ارائه گشته‌اند. نقطه نمونه گوسی که برای مقایسه تنش‌ها انتخاب شده در شکل (۸-۱) با علامت * مشخص می‌باشد. نتایج حاصل از تحلیل در جدول (۲) مرتب گشته‌اند. شایان توجه است که جزء SQ2 در حالت خمش ثابت برای صفحه نازکی با $t = 0/1$ نیز همان پاسخ‌ها را می‌دهد.

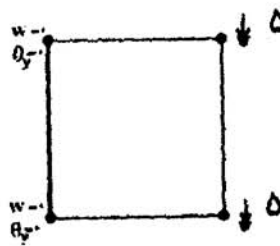
باید آگاه بود، برقراری آزمون وصله برش خالص برای این رابطه‌سازی امکان‌پذیر نیست. زیرا، چنانچه برش یا کرنش برشی ناصفر باشد، مطابق رابطه (۳۰)، مشتق‌های دوران نیز ناصفر می‌شوند. در نتیجه، میدان دوران درون جزء صفر نخواهد بود، باید دانست، فقط در گره‌های اجزا به سبب وارد کردن شرایط مرزی این مقادیر صفر می‌گردند.

حال، آزمون وصله پیچش کیرششف مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، خیز در سه گوشه صفحه شکل (۸-۱) مقید می‌شود. به گوشه دیگر باریکه رو به پایینی وارد می‌گردد. تنش‌های ایجاد شده در نقطه

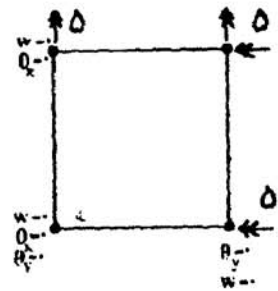
از یک وصله چند جزئی مرسوم نیز برای مقایسه تنش‌های درون صفحه زیر اثر خمش ثابت استفاده شده است. شکل (۸) نشان دهنده هندسه چنین صفحه‌ای می‌باشد. در حالت خمش $M_x = 1$ ، شرایط مرزی و بارگذاری مطابق شکل (۲-۸) هستند. شرایط بارگذاری و مرزی حالت پیچش ثابت، $M_{xy} = 1$ ، نیز در شکل



(۱)



(۲)



(۳)

شکل (۸) وصله چند جزئی.

جدول (۲) آزمون وصله خمش و پیچش ثابت.

| | تنش | M_x | M_y | M_{xy} | Q_x | Q_y |
|----------------|-----|--------|--------|----------|--------|--------|
| خمش M_x ثابت | QS1 | ۱/۱۸۸۴ | ۰/۱۲۱۱ | ۰/۲۲۴۷ | ۰/۱۹۸۲ | ۰/۲۱۴۱ |
| | QS1 | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| پیچش ثابت | QS1 | ۰/۲۹۲۷ | ۰/۲۸۷۳ | ۱/۱۰۹۶ | ۰/۱۹۹۹ | ۰/۲۷۰۷ |
| | QS1 | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |

نمونه گوس در جدول (۳) درج شده اند. همان گونه که مشاهده می شود، جزء QS2 نمی تواند این آزمون را به درستی برقرار کند. برای این که آزمون مزبور توسط جزء QS2 برقرار گردد، باید تغییراتی در ماتریس B^* ، رابطه (۵۲)، داده شود. بدین صورت که در ستون های مربوط به خیز از سطر سوم می بایستی عبارت $l(-1)^j$ جایگزین گردد. عامل ز شماره ستون مربوطه است. سایر درایه های سطر سوم در این حالت صفر می باشند. پس از انجام این تغییر، حالت پیش می نندلین ثابت برقرار نخواهد شد.

جدول (۳) آزمون وصله پیش گیرش هف ثابت.

| | M_x | M_y | M_{xy} | Q_x | Q_y |
|-----|--------|---------|----------|---------|---------|
| QS1 | ۰/۰۴۲۳ | ۰/۰۴۱۱ | ۰/۵۲۴۸ | -۰/۰۲۲۲ | -۰/۰۸۰۵ |
| QS1 | ۰/۰۱ | -۰/۰۱۴۱ | ۰/۶۴۱۶ | ۰/۰۰۱۴۴ | -۰/۰۲۸۹ |

در پایان این بخش خاطر نشان می کند، با ریز شدن شبکه برقراری آزمون وصله توسط جزء QS1 با دقت بیشتر انجام خواهد گرفت.

۳-۶. تحلیل صفحه مربعی

در این بخش، پاسخ های حاصل از تحلیل صفحه مربعی مورد بررسی قرار می گیرد. دو نوع تکیه گاه ساده و گیردار و بارگذاری های گسترده یکنواخت و نیز بار متمرکز در مرکز صفحه مورد نظر است. به سبب تقارن سازه، یک چهارم آن با $N \times N$ جزء مربعی الگوسازی می شود. در حالت کاربرد تکیه گاه ساده در تمام مرزهای سازه و وارد کردن بار گسترده یکنواخت، تغییر مکان بهنجار شده مرکز صفحه در جدول (۴) آورده شده است. در این حالت، نسبت l/t صفحه برابر

جدول (۴) خیز بهنجار شده مرکز صفحه مربعی ساده و بار گسترده ($l/t = 10$).

| N | QS1 | QS2 | SACMO | SACM | Q1 | Quad4s |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| ۲ | ۱/۰۶۶ | ۰/۹۸۷ | ۱/۰۵۱ | ۱/۰۶۵ | ۱/۰۴۹ | ۰/۹۸۵ |
| ۴ | ۱/۰۱۷ | ۰/۹۸ | ۱/۰۳۱ | ۱/۰۱۶ | ۱/۰۱۲ | ۰/۹۹۶ |
| ۸ | ۱/۰۰۵ | ۰/۹۸۴ | ۱/۰۰۳ | ۱/۰۰۴ | - | ۰/۹۹۹ |

۱۰ بوده و اثر برش در تغییر شکل صفحه مؤثر می باشد. عامل l ، بیانگر بعد صفحه بوده و در این آزمون مقداری برابر ۱۰ دارد. چنانچه بار وارد به صفحه q و صلیبیت خمشی آن α_b باشد، مقدار دقیق خیز مرکز صفحه برابر $\frac{qL^4}{100\alpha_b}$ خواهد بود. پاسخ های به دست آمده از تحلیل صفحه توسط اجزای QS1 و QS2، با اجزای پژوهشگران دیگر مقایسه می گردد. اجزای SACM و SACMO مستطیلی بوده و از وارد کردن اثر برش در جزء ACM به دست آمده اند [8]. جزء Q1 نیز توسط رافایل، در سال ۱۹۹۵ میلادی، ارائه گردیده است [11].

یادآوری می کند، هر سه جزء درج شده میدان های درونیاب وابسته ای به کار می برند و با جزء های QS1 و QS2 شباهت هایی دارند. جزء Quad4s نیز از گروهی انتخاب گردیده که میدان های درونیاب مستقلی دارند. جزء مزبور، همان چهارگرمی با تابع اولیه گیری انتخابی است. این نتایج نشان می دهد که پاسخ های چهار جزء QS1، QS2، SACM و SACMO به طور تقریبی یکسانند. همچنین، اجزای مزبور نرم تر از حد معمول هستند. جزء Quad4s نتایج عالیتری نسبت به سایرین می دهد، گرچه، دقت جزء QS1 در حد قابل قبولی است. جزء QS2 نیز پاسخ های قابل قبولی در این حالت به دست می دهد.

بیشترین مقدار لنگر سازه، در مرکز نسبت به مقدار $l^2 \frac{q}{479}$ بهنجار شده و در جدول (۵) درج گردیده است. جدول (۶) نیز بیانگر حداکثر برش بهنجار شده صفحه خمشی نسبت به $l \frac{q}{228}$ می باشد. این مقدار برش Q_y در وسط لبه ای است که موازی با محور x بوده و روی تکیه گاه ساده قرار دارد. خاطر نشان می کند، مقادیر درج شده برای جزء های QS، مربوط به لنگر و برش نزدیکترین نقطه نمونه گوس به محل تنش بیشینه است.

جدول (۵) لنگر بهنجار شده مرکز صفحه ساده و بار گسترده ($L/t=10$).

| N | QS1 | QS2 | SACMO | SACM | QI | Quad4s |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| ۲ | ۱/۹۹۶ | ۱/۱۷۶ | ۱/۰۳۵ | ۱/۰۹۹ | ۱/۰۴۴ | ۰/۹۹۶ |
| ۴ | ۱/۹۹۸ | ۱/۲۳۶ | ۱/۰۰۵ | ۱/۰۲۲ | ۱/۰۱۰ | ۱/۰۰۰ |
| ۸ | ۰/۹۹۹ | ۱/۳۴۸ | ۱/۰۰۳ | ۱/۰۰۵ | - | ۱/۰۰۰ |

جدول (۸) لنگر بهنجار شده مرکز صفحه مربعی ساده و بار گسترده ($L/t=100$).

| N | QS1 | QI | QMF | Quad4s |
|---|-------|-------|-------|--------|
| ۲ | ۰/۹۹۴ | ۱/۰۴۶ | ۱/۰۸۶ | ۰/۹۹۶ |
| ۳ | ۰/۹۹۸ | ۱/۰۲۱ | ۱/۰۱۷ | ۱/۰۰۰ |
| ۴ | ۰/۹۹۹ | ۱/۰۱۳ | - | ۱/۰۰۰ |
| ۵ | ۰/۹۹۹ | ۱/۰۰۶ | - | ۱/۰۰۰ |

حال، با تبدیل تکیه گاه های صفحه مربعی به تکیه گاه گیردار آزمون دیگری انجام می گیرد. خیزهای بهنجار شده مرکز صفحه برای دو نسبت ۱۰ و ۱۰۰، L/t ، به ترتیب در جدول های (۹ و ۱۰) آورده شده اند. برای صفحه نازک، خیز مرکز صفحه نسبت به مقیدار $\frac{qL^4}{100\alpha_b}$ و در حالت صفحه نیمه ضخیم نسبت به $\frac{qL^4}{100\alpha_b}$ $0/15$ بهنجار شده است.

جدول (۹) خیز بهنجار شده مرکز صفحه مربعی گیردار و بار گسترده ($L/t=100$).

| N | QS1 | QS2 | QR | Quad4s |
|---|-------|-------|-------|--------|
| ۲ | ۱/۱۱۱ | ۰/۹۲۵ | ۰/۹۱۰ | ۰/۹۶۰ |
| ۳ | ۱/۰۵۵ | ۰/۹۸۴ | ۰/۹۶۰ | ۰/۹۸۲ |
| ۴ | ۱/۰۳۳ | ۰/۹۲۴ | ۰/۹۷۰ | ۰/۹۹۱ |
| ۵ | ۱/۰۳۳ | ۰/۹۱۷ | ۰/۹۸۷ | ۰/۹۹۵ |
| ۶ | ۱/۰۱۶ | ۰/۹۱۵ | - | ۰/۹۹۷ |

در حالتی که نسبت L/t برابر ۱۰۰ باشد، سازه در محدوده صفحه های نازک قرار خواهد گرفت. خیز و لنگر بهنجار شده مرکز صفحه در این حالت، به ترتیب، در جدول های (۷) و (۸) درج شده اند. مقدار دقیق خیز و لنگر، به ترتیب، برابر $0/406 \frac{qL^4}{\alpha_b}$ و $0/479qL^2$ می باشد [16]. همان گونه که از جدول (۷) مشاهده می شود، جزء QS2 در این حالت به پاسخی کمتر از مقدار واقعی همگرا می گردد.

جدول (۶) حداکثر برش بهنجار شده صفحه مربعی ساده و بار گسترده ($L/t=10$).

| N | QS1 | QS2 | SACMO | SACM | Quad4s |
|---|-------|--------|-------|-------|--------|
| ۲ | ۰/۷۱۹ | ۰/۴۴۱ | ۰/۹۳۶ | ۰/۷۵۱ | -۱/۴۵۱ |
| ۴ | ۰/۸۵۸ | ۰/۰۹۷۶ | ۰/۹۶۴ | ۰/۸۶۸ | ۰/۱۶۸ |
| ۸ | ۰/۹۲۲ | ۰/۲۲۲ | ۰/۹۷۱ | ۰/۹۲۵ | ۰/۷۶۲ |

جدول (۷) خیز بهنجار شده مرکز صفحه مربعی ساده و بار گسترده ($L/t=100$).

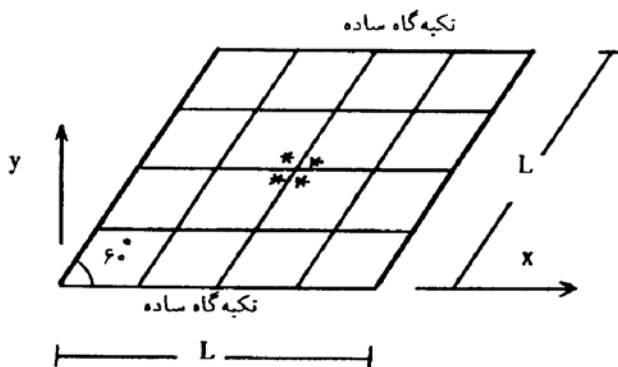
| N | QS1 | QS2 | QI | QMF | Quad4s |
|---|-------|-------|-------|-------|--------|
| ۲ | ۰/۰۶۷ | ۰/۹۷۲ | ۱/۰۴۹ | ۱/۰۶۴ | ۰/۹۷۸ |
| ۳ | ۱/۰۲۰ | ۰/۸۸۱ | ۱/۰۲۲ | - | ۰/۹۹۰ |
| ۴ | ۱/۰۱۷ | ۰/۸۵۴ | ۱/۰۱۲ | ۱/۰۱۵ | ۰/۹۹۵ |
| ۵ | ۱/۰۱۲ | ۰/۸۴۳ | ۱/۰۰۷ | - | ۰/۹۹۸ |
| ۶ | ۱/۰۰۷ | ۰/۸۴۰ | - | - | ۱/۰۰۰ |

جدول (۱۰) خیز مرکز صفحه مربعی گیردار و بار گسترده ($L/t = 10$).

| N | QS1 | QS2 | Q1 | SACMO | SACM | Quad4s |
|---|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| ۲ | ۱/۰۹۷ | ۰/۹۷۸ | ۰/۹۱۵ | ۱/۰۹۷ | ۰/۰۹۷۱ | ۰/۹۷۳ |
| ۳ | ۱/۰۴۷ | ۰/۹۳۳ | ۰/۹۶۶ | - | - | ۰/۹۹۳ |
| ۴ | ۱/۰۲۶ | ۰/۹۰۳ | ۰/۹۸۲ | ۱/۰۲۶ | ۱/۰۲۶ | ۰/۹۹۳ |
| ۵ | ۱/۰۱۷ | ۰/۸۸۹ | ۰/۹۹۰ | - | - | ۱/۰۰۰ |
| ۶ | ۱/۰۱۲ | ۰/۸۷۹ | - | - | - | ۱/۰۰۰ |

جدول (۱۱) خیز مرکز صفحه مربعی و بار متمرکز.

| $\frac{L}{t}$ | N | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | دقیق |
|---------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| ۱۰۰ | ساده | ۰/۱۲۴ | ۰/۱۲۰ | ۰/۱۱۹ | ۰/۱۱۸ | ۰/۱۱۷ | ۰/۱۱۷ | ۰/۱۱۷ | $\frac{1}{16} \frac{PL^4}{100\alpha_b}$ |
| | گیردار | ۰/۴۱۹ | ۰/۵۹۴ | ۰/۵۸۲ | ۰/۵۷۷ | ۰/۵۷۳ | ۰/۵۷۱ | ۰/۵۷۰ | ۰/۵۶ |
| ۱۰ | ساده | ۰/۱۲۷ | ۰/۱۲۵ | ۰/۱۲۵ | ۰/۱۲۵ | ۰/۱۲۶ | ۰/۱۲۶ | ۰/۱۲۶ | - |
| | گیردار | ۰/۷۵۹ | ۰/۷۵۲ | ۰/۷۵۴ | ۰/۷۵۸ | ۰/۷۶۲ | ۰/۷۶۷ | ۰/۷۷۱ | - |



شکل (۹) صفحه مورب رزاقی ($N = 2$).

این مسأله با یک شبکه $N \times N$ الگوسازی می شود. در اینجا، دو نوع طرح تابع اولیه گیری با 2×2 و 3×3 نقطه نمونه گوس به کار رفته است. پاسخ های دو طرح با هم تفاوت چندانی ندارند. خیز مرکزی بهنجار شده نسبت به پاسخ تفاوت محدودی در جدول (۱۲) درج شده است.

نتایج خیز مرکز صفحه برای حالت وجود بار متمرکز در مرکز در جدول (۱۱) درج شده اند.

۴-۶- تحلیل صفحه مورب رزاقی

شکل (۹) یک صفحه مورب را نشان می دهد. دو لبه مقابل هم در این سازه دارای تکیه گاه ساده و دو لبه دیگر آزادند. رزاقی این مسأله را با اجزای مثلثی تحلیل نمود. حل تفاوت محدودی خیز و لنگر M_y در مرکز به صورت زیر می باشد $\{H1\}$:

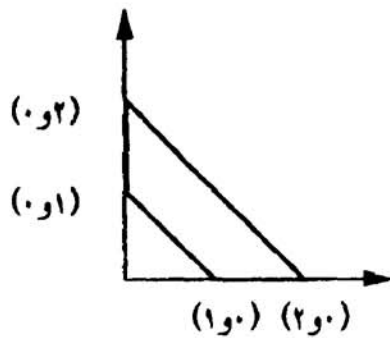
$$W = 0.007945 \frac{qL^4}{\alpha_b}$$

$$M_y = 0.09589 qL^2$$

ضریب کشسانی سازه مزبور برابر ۱۰۰۰ و نسبت پواسون آن برابر $\nu = 0.31$ است. بار گسترده ای به شدت $q = 1$ به صفحه وارد می شود.

جدول (۱۲) بهنجار شده خیز و لنگر M_y مرکز صفحه مورب رزاقی.

| خیز مرکزی | | | | لنگر M_y در مرکز | | | |
|-----------|-----------|-----------|-------|--------------------|-----------|-------|-------|
| N | QS1 (۳×۳) | QS1 (۲×۲) | GS2 | Q1 | QS1 (۲×۲) | QS2 | Q1 |
| ۲ | ۰/۹۳۶ | ۰/۹۳۵ | ۰/۹۱۳ | ۰/۷۱۲ | ۰/۹۰۵ | ۰/۸۵۰ | ۰/۶۳۲ |
| ۴ | ۱/۰۲۱ | ۱/۰۲۷ | ۰/۹۶۴ | ۰/۸۹۳ | ۰/۹۷۴ | ۰/۹۶۸ | ۰/۸۷۰ |
| ۶ | ۱/۰۱۴ | ۱/۰۱۵ | ۰/۹۹۹ | - | ۰/۹۹۱ | ۰/۹۹۴ | - |
| ۸ | ۱/۰۰۹ | ۱/۰۰۹ | ۰/۹۷۷ | ۰/۹۶۷ | ۰/۹۶۶ | ۱/۰۰۴ | ۰/۹۶۴ |



شکل (۱۰) جزئی با ماتریس G ویژه.

۷- نتایج

با انتخاب چند جمله‌ای‌های مناسب و به کار بردن رابطه‌های تعادل، تغییر مکان و نیز نیرو - تغییر مکان، ماتریس سختی تیر تیموشنکو محاسبه شد. نتیجه به دست آمده همان ماتریس دقیق تیر تیموشنکو است. به دنبال آن، اثر برش در صفحه‌های خمشی مورد مطالعه قرار گرفت. سپس، جزء‌های QS1 و QS2 برای تحلیل صفحه‌های خمشی با اثر تغییر شکل برشی پیشنهاد شد. ویژگی‌های این اجزا مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج عددی مختلف بیانگر آن است که در بیشتر موارد جزء پیشنهادی QS1 توانایی‌های خوبی برای تحلیل دارد.

خاطر نشان می‌شود، برای محاسبه لنگر M_y در مرکز، از لنگر M_y نزدیکترین چهار نقطه نمونه گوس اطراف مرکز میانگین‌گیری می‌گردد. نقاط گوس مزبور، در شکل (۹) با علامت * مشخص هستند. لنگرهای بهنجار شده این حالت نیز در جدول (۱۲) ارائه شده است. همان گونه که مشاهده می‌شود، جزء QS1 نتایج بهتری را نسبت به جزء راقایل ارائه می‌دهد.

۵-۶- تحلیل صفحه دایره‌ای گیردار

الکوسازی صفحه دایره‌ای با جزء QS1 و کاربرد، به ترتیب ۲ و ۲۷ جزء، سازه ناپایداری به دست می‌دهد. پس از بررسی ماتریس‌های جزء مشخص گردید که برای برخی از شکل‌ها، محاسبه وارون ماتریس G امکان‌پذیر نیست. به سخن دیگر، در این موارد، دترمینان ماتریس G صفر می‌گردد. چنین شکل‌های در الگوی ۳ و ۲۷ جزئی وجود دارد. شکل (۱۰) نیز جزئی دیگری را نشان می‌دهد که ماتریس G وابسته به آن وارون‌پذیر نیست. این حالت به اثر برش ارتباطی ندارد. در حالت‌های مزبور، حتی با صفر بودن عامل β باز هم وارون ماتریس G قابل محاسبه نخواهد بود. مشکل مزبور ناشی از تابع درجه چهار ناقصی می‌باشد که به عنوان تابع درونیاب انتخاب شده است. پیش از این اشاره شد که جزء QS1 را می‌توان گسترش یافته جزء مرجع [10] به صفحه‌های ضخیم دانست. در مثال‌های حل شده در مرجع [10] نیز حالت‌های خاصی که منجر به ویژه شدن ماتریس سختی شود وجود ندارد.

- [1] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates", *J. Appl. Mech.* 12, 69-76, (1945).
- [2] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates", *J. Appl. Mech.* 18, 31-81, (1951).
- [3] R. W. Clough and C. A. Felippa, "A refined quadrilateral element for analysis of plate bending", *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech.*, Wrightpatterson Air Force Base, (1968).
- [4] B. M. Irons and A. Razzaque, "Introduction of shear deformation into a thin plate displacement formulation", *AIAA J.* 11, 1438-1439, (1973).
- [5] A. J. Fricker, "A simple method for including shear deformations in thin plate elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 23, 1355-1366, (1986).
- [6] A. Adini and R. W. Clough, "Analysis of plate bending by the finite element method", Report, Submitted to the National Science Foundation (Grant G7337), Washington D.C., (1960).
- [7] G. Onu, "Inclusion for shear effects in the ACM element", *Comput. Struct.* 18, 459-464, (1984).
- [8] J. Petrolito, "A modified ACM element for thick plate analysis," *Comput. Struct.* 32, 1303-1309, (1989).
- [9] L. Yuqiu and X. Fei, "A universal method for including shear deformation in thin plate elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 34, 171-177, (1992).
- [10] P. G. Ming and L. S. Fa, "A new element used in non-orthogonal boundary plate bending theory an arbitrarily quadrilateral element", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 24, 1031-1024, (1987).
- [11] O. L. Roufaeil, "A new four-node quadrilateral plate bending element", *Comput. Struct.* 54, 871-879, (1995).
- [12] X. - J. Wang and T. Belytschko, "A study of stabilization and projection in the four-node Mindlin plate element", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 28, 2223-2238, (1989).
- [13] J. L. Batoz and I. Katili, "On a simple triangular Reissner/Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints", *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 35, 1603-1632, (1992).
- [14] P.G. Bergan and X. Wang, "Quadrilateral plate bending elements with shear deformations", *Comput. Struct.* 19, 25-34, (1984).
- [15] I. W. Liu, T. Kerh and C. - C. Lin, "A conforming quadrilatera plate bending element with shear deformation", *Comput. Struct.* 56, 93-100, (1995).
- [16] E. Hinton and H. C. Huang, "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields", *Comput. Struct.* 23, 409-431, (1986).
- [17] م. رضایی پزندی، نگره ماتریسی تحلیل سازه‌ها، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ایران، (۱۳۷۴).